

Tanári Segédlet

11 osztály fizika fakultáció

Mechanika témakör



Előszó

A 11. évfolyamon a fakultációs csoportok átismétlik a gimnázium első két évében tanult középszintű tananyagot (mechanika, hőtan, elektromosság, mágnesesség), valamint feldolgozásra kerülnek azok az anyagrészek is melyek az emelt szintű érettségi vizsga és az OKTV részét képezik.

Célszerű az ismétlést módszeresen végezni, hangsúlyt kell fektetni az egymásra épülő, egymásból következethető elméletekre, hogy a tanulók teljes képet kapjanak az egyes tananyagrészek egymáshoz viszonyuló kapcsolatáról.

A tanári segédlet összefoglalja és rendszerbe foglalja a 9. évfolyamon tanult Mechanika témakör középszintű tananyagát és a megfelelő logikai sorban kiegészíti az emelt szintű anyagrészekkel, valamint az OKTV versenyeken számonkért részekkel. Minden témakör rövid összefoglalója után jelöljük a tanulói munkafüzet oda tartozó részeit és ugyanakkor módszertani javaslatokat is teszünk a munkafüzet feldolgozására.

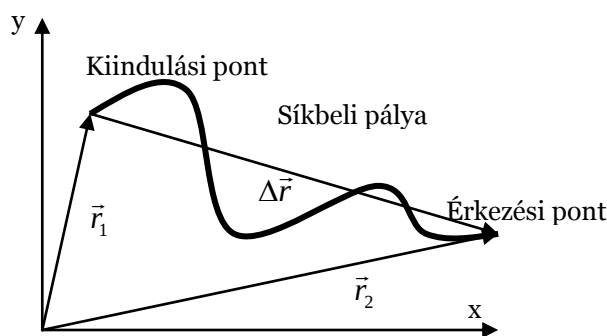
A kiadványban a következő témakörök kerülnek feldolgozásra:

- A pontszerű test mozgása (kinematika).
- A pontszerű test dinamikája.
- Pontrendszerek dinamikája (Emelt szint).
- A merev test egyensúlya.
- A merev test forgó és összetett mozgásának dinamikája (OKTV-n számonkért tananyag)

1. A tömegpont kinematikája

Alapfogalmak:

- A tömegpont: ha egy tárgy haladó mozgást ír le (a tárgyhoz rendelt bármely egyenes a mozgás során önmagával párhuzamos marad), akkor elegendő a tárgyhoz rendelt egyetlen pontot tanulmányozni. Ezért a méretes tárgyat egyetlen ponttal helyettesítjük, melyhez hozzárendeljük a tárgy tömegét. Ez a tömegpont.
- A mozgás és nyugalom viszonylagos állapotok, vagyis a vonatkoztatástól függenek. A tömegpont mozgását mindig egy vonatkoztatási testhez képest tárgyaljuk.
- A pálya: az a térbeli görbe melyet a tömegpont mozgása során leír.
- A megtett út: a tömegpont által leírt pályaszakasz hossza. Jele: **s**, SI mértékegysége a méter (**m**)
- Az elmozdulás: egy irányított szakasz (vektor), mely összeköti a kiindulási pontot az érkezési ponttal. Jele: $\Delta \vec{r}$, SI mértékegysége (**m**). Az elmozdulás vektora a mozgó tömegpont helyvektorának ($\vec{r}$) vál-



tozásaként is értelmezhető.

- Az átlagsebesség: a mozgás gyorsaságát jellemző mennyiség.

$$v_{\text{á}} = \frac{\text{megtett út}}{\text{időtartam}} = \frac{s}{t}$$

$$[v] = 1 \frac{m}{s} = 3,6 \frac{km}{h}$$

- a pillanatnyi sebesség (sebesség): egy nagyon rövid időtartamra számított átlagsebesség. Az a sebesség érték mellyel, ha folyamatosan haladna a test ugyanazt az utat ugyanannyi idő alatt tenné meg mint változó mozgással.

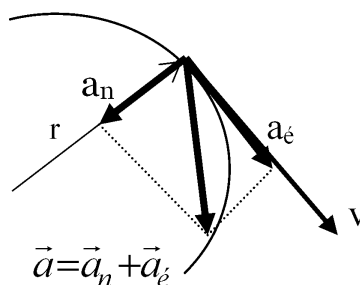
$$\vec{v} = \frac{\text{elmozdulás}}{\text{idő}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \Big|_{\Delta t \rightarrow 0}$$

- a sebesség egy vektormennyiség. A vektor minden pontban a pálya érintője, iránya megadja a mozgás-irányt.
- A gyorsulás: egy mozgás során megtörténhet, hogy a sebességvektor pillanatról pillanatra változik. Ez akkor lehetséges, ha a mozgó tárgy gyorsul, lassul (változik a sebesség nagysága), vagy a pálya görbe vonalú (változik a sebességvektor avagy a mozgás iránya). A gyorsulás egy olyan vektormennyiség mely a sebességvektor időbeli változását jellemzi. Háromféle gyorsulásról beszélünk:

- 1) Érintőleges (tangenciális) gyorsulás: a sebesség nagyságának változását jellemzi. Az érintőleges gyorsulás iránya érintője a pályának, a sebesség növekedésének irányába mutat.

$$a_{\epsilon} = \frac{\text{sebesség nagyságának változása}}{\text{idő}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Big|_{\Delta t \rightarrow 0} \quad [a_{\epsilon}] = 1 \frac{m}{s^2}$$

- 2) Normális (centripetális) gyorsulás: a sebességvektor irányváltozását jellemzi. Ilyen gyorsulásról csak görbe vonalú mozgás esetén beszélünk. A normális gyorsulásvektor merőleges a sebességvektorra, iránya a pálya görbületi középpontja felé mutat.



$$a_n = \frac{v^2}{r} \text{ ahol } v \text{ a kerületi sebesség, } r \text{ a pálya görbületi sugara az adott helyen}$$

- 3) Az eredő gyorsulás: az érintőleges gyorsulás és a normális gyorsulás vektorok eredője. Ezt nevezzük egyszerűen gyorsulásnak. Jele: $\mathbf{a}$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\epsilon^2}$$

Egyenes vonalú mozgás esetén $\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ ezért az eredő gyorsulás $\mathbf{a} = \mathbf{a}_\epsilon$, tehát egyenes vonalú mozgás esetén egyszerűen gyorsulásról beszélünk. Egyenletes görbe vonalú mozgás esetén $\mathbf{a}_\epsilon = \mathbf{0}$ ezért $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n$. Tehát egy egyenletes görbe vonalú mozgás gyorsuló mozgás, a mozgás a pálya görbületi középpontja felé „gyorsul”.

A tömegpont egyszerű mozgás típusai.

Az egyenes vonalú egyenletes mozgás.

- a mozgás jellemzői: a pálya egyenes, a sebesség nagysága állandó (a jármű nem gyorsul és nem lassul mozgása közben). Mivel a pálya egyenes, mondhatjuk, hogy a sebesség vektora állandó. $\mathbf{a}_\epsilon = \mathbf{0}$, $\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$
- a megtett út és eltelt idő kapcsolata:

$$s = v \cdot t$$

Az egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás.

- a mozgás jellemzői: a pálya egyenes, a sebesség nagysága egyenletesen változik, ami annyit jelent, hogy időegységenként a sebességváltozás mértéke ugyanakkora. $\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$, $\mathbf{a}_\epsilon = \mathbf{a} = \text{állandó}$.

példa: ha egy mozgás gyorsulása -5m/s^2 ez azt jelenti, hogy a sebesség minden másodperc után 5 m/s -al csökken.

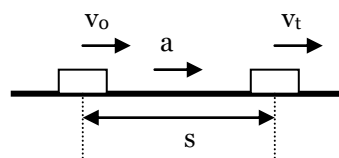
- Ha a sebesség növekedik, akkor a mozgás gyorsuló ($\mathbf{a} > \mathbf{0}$), ha a sebesség csökken, akkor a mozgás lassuló ($\mathbf{a} < \mathbf{0}$).
- Jelölések:
 - $\mathbf{v}_0$ – a jármű sebessége a mozgás tanulmányozásának kezdetekor (indulási sebesség, kezdő sebesség)

v_t – a jármű sebessége az s hosszúságú út megtétele után, a mozgás tanulmányozásának kezdetétől t idő múlva.

➤ Összefüggések:

$$v_t = v_0 + a \cdot t$$

$$s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$



$$v_t^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot s$$

$$s = \frac{v_t + v_0}{2} \cdot t$$

Függőleges szabad mozgás a Föld gravitációs terében:

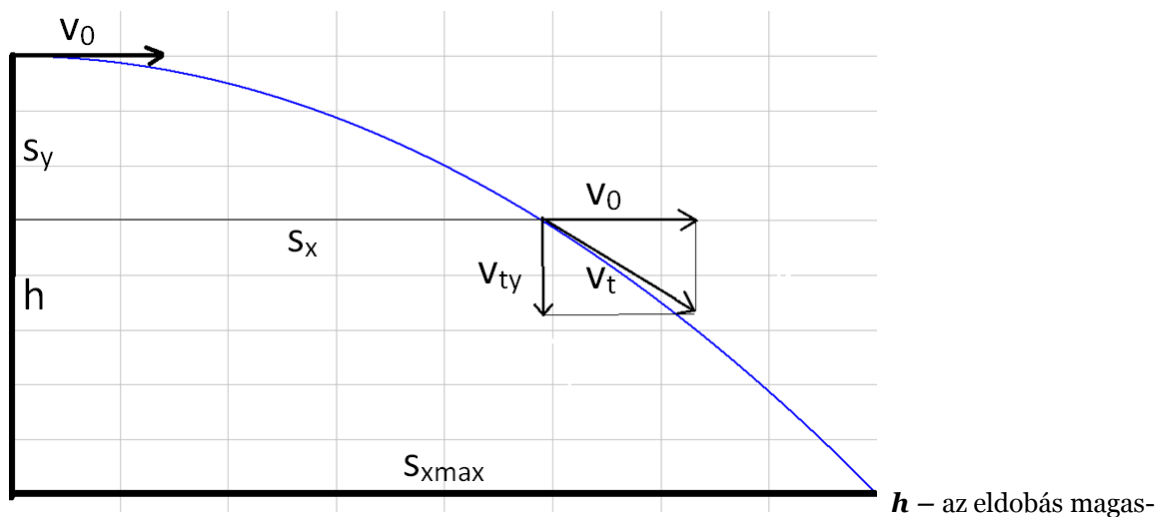
- Szabad esés: $v_0 = 0$, $a = g = 9,81m/s^2 \approx 10m/s^2$, g – a gravitációs gyorsulás
- Lefelé hajítás: $v_0 \neq 0$, $a = g = 9,81m/s^2 \approx 10m/s^2$
- Felfelé hajítás: $v_0 \neq 0$, $a = -g = -9,81m/s^2 \approx -10m/s^2$

A hajításokra érvényesek az egyenletesen változó mozgás összefüggései.

Vízszintes hajítás a Föld gravitációs terében (emelt szint)

- A mozgás tárgyalása: két egyenes vonalú mozgás összetételéből eredő mozgás. A vízszintes irány mentén a tömegpont egyenes vonalú egyenletes mozgást végez $v_0 = \text{állandó}$ sebességgel. A függőleges irány mentén a mozgás egy szabadesés. A pálya egy parabola ív.
- Jelölések:

v_0 – a vízszintes irányú kezdősebesség



sága

v_{ty} – a t idő után elért sebesség függőleges irányú komponense

s_x – az elmozdulás vízszintes irányú komponense

s_y – az elmozdulás függőleges irányú komponense

t_m – a mozgás időtartama a földet érésig

s_{xmax} – a hordtávolság

v_t – a t idő után elért sebesség

➤ Összefüggések:

$$s_x = v_0 \cdot t$$

$$s_y = \frac{g}{2} \cdot t^2 = \frac{g}{2v_0^2} \cdot s_x^2$$

$$s_{xmax} = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$t_m = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v_t = \sqrt{v_0^2 + v_{ty}^2}$$

$$v_{ty} = g \cdot t$$

Ferde hajtás a Föld gravitációs terében (OKTV verseny szint)

- A mozgás tárgyalása: két egyenes vonalú mozgás összetételéből eredő mozgás. A vízszintes irány mentén a tömegpont egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, $v_x = v_0 \cos \alpha = \text{állandó}$ sebességgel. A

függőleges irány mentén a mozgás egy függőleges felfelé hajítás $v_{y0} = v_0 \sin \alpha$ kezdősebességgel, melyet egy szabadesés követ. A pálya egy parabola.

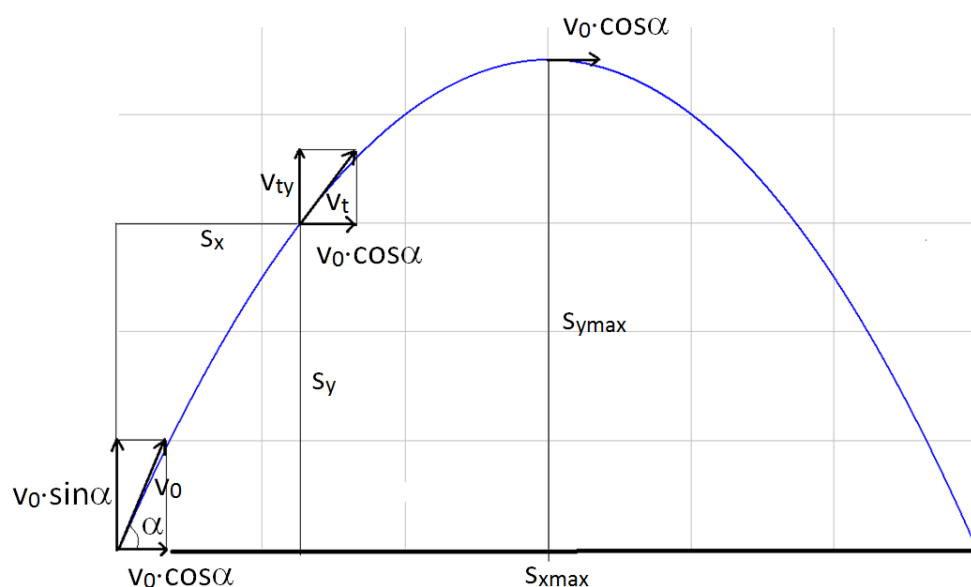
➤ Jelölések:

v_0 – az eldobás sebessége

v_{ty} – a t idő után elért sebesség függőleges irányú komponense

s_x – az elmozdulás vízszintes irányú komponense

s_y – az elmozdulás függőleges irányú komponense



t_m – a mozgás időtartama a földet érésig

s_{xmax} – a hordtávolság

s_{ymax} – az emelkedés magassága

v_t – a t idő után elért sebesség

➤ Összefüggések:

$$s_x = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha$$

$$s_y = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$s_{y \max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$s_y = s_x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot s_x^2$$

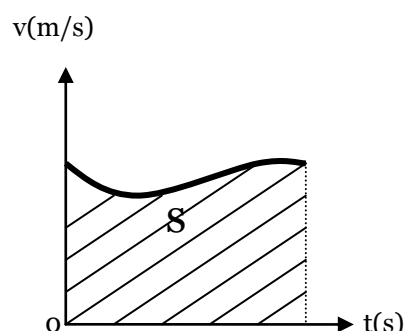
$$v_{ty} = v_0 \sin \alpha - g \cdot t$$

$$v_t = \sqrt{v_x^2 + v_{ty}^2}$$

$$t_m = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$s_{x \max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

- A megtett út kiszámítása grafikonból: Ha egy jármű mozgása változó, akkor a megtett út kiszámítható, ha ismert a mozgás sebesség-idő grafikonja. A megtett út számszerűen egyenlő a sebesség „grafikonja alatti” területtel.



Az egyenletes körmozgás.

- A mozgás jellemzői: a pálya kör, a sebesség nagysága állandó, a sebességvektor változó mert iránya mindig érintőirányú. $\mathbf{a}_e = \mathbf{0}$, $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_{cp} = \text{állandó}$, tehát a mozgás a kör középpontja felé „gyorsul”. A mozgás periodikus (egyenlő időközönként ismétlődik).
- Jellemző mennyiségek:
 - T – keringési idő (periódusidő): egy teljes kör megtételéhez szükséges idő s -ban
 - f, n – fordulatszám, frekvencia: időegység alatt megtett fordulatok száma $1/s$ – ban
 - ω - szögsebesség: az r vezérsugár időegység alatti φ szögelfordulása $1/s$ ban. A szögeket radiánban mérjük. π (rad) $\rightarrow 180^\circ$. A radiánt mint mértékegységet nem írjuk ki.
 - v_k – a tömegpont kerületi sebessége: időegység alatt befutott s ívhossz .
 - $\mathbf{a}_{cp}$ – centripetális gyorsulás.
 - t – a mozgás ideje
- $T, f, \omega, v_k, \mathbf{a}_{cp}$ a mozgásra jellemző időben állandó mennyiségek .
- Összefüggések:

$$T = \frac{1}{f} \qquad \omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2\pi}{T} \qquad \varphi = \frac{s}{r} = \omega \cdot t$$

$$v_k = \omega \cdot r = \frac{s}{t} \qquad a_{cp} = \frac{v_k^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

Az egyenletesen változó körmozgás (emelt szint)

- A mozgás jellemzői: a pálya kör, a sebesség nagysága egyenletesen változik, ami annyit jelent, hogy időegységenként a sebességváltozás mértéke ugyanakkora. **a_ϵ = állandó.**
példa: ha egy mozgás érintőleges gyorsulása -5m/s^2 ez azt jelenti a sebesség minden másodperc után 5 m/s-al csökken.
- Ha a sebesség növekedik, akkor a mozgás gyorsuló **$a_\epsilon > 0$** , ha a sebesség csökken, akkor a mozgás lassuló **$a_\epsilon < 0$** .
- Mivel a pálya kör, centripetális gyorsulásról is beszélünk: **a_{cp}**
- Jellemző mennyiségek:

T, f, ω, v_k : melyek időben változnak

β - szöggyorsulás: az időegység alatt bekövetkező szögsebesség-változás $\frac{1}{s^2}$ - ben. **$\beta > 0$** gyorsuló mozgás, **$\beta < 0$** lassuló mozgás.

Ha egy mozgás szöggyorsulása $3 \frac{1}{s^2}$ akkor ez azt jelenti, hogy a szögsebesség másodpercenként $3 \frac{1}{s}$ -al nő.

φ - a vezérsugár szögelfordulása **t** idő alatt **radiánban**.

s – a befutott ívhossz **t** idő alatt.

ω_0 – indulási (kezdeti) szögsebesség

v_{k0} – indulási (kezdeti) kerületi sebesség

a – az eredő gyorsulás

- Összefüggések:

$$a_{cp} = \frac{v_k^2}{r} = \omega^2 \cdot r \qquad a_\epsilon = \beta \cdot r \qquad a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_\epsilon^2}$$

$$\omega = \omega_0 + \beta \cdot t$$

$$s = v_{k0} \cdot t + \frac{a_{\dot{e}}}{2} \cdot t^2$$

$$v_k^2 = v_{k0}^2 + 2 \cdot a_{\dot{e}} \cdot s$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \cdot \beta \cdot \varphi$$

$$\varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{\beta}{2} \cdot t^2$$

$$T = \frac{1}{f}$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$$

$$v_k = \omega \cdot r$$

$$\omega = \beta \cdot t$$

Módszertani javaslat:

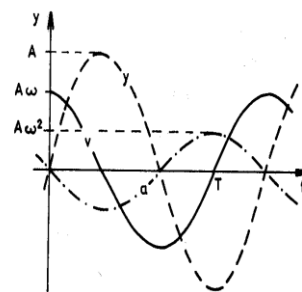
A mozgástani anyagrész összefoglalása után a fogalmak megértése és elsajátítása érdekében célszerű a munkafüzet 2. -10. oldalán található kérdéseket közösen megválaszolni a tanuló csoporttal. Az elméleti kérdések házi feladatként is megválaszolhatók.

Az elméleti fogalmak megértése után elvégezhető a munkafüzet ide vonatkozó mérési feladatai:

- Az egyenletesen gyorsuló mozgás vizsgálata (lejtőn leguruló kiskocsival, időmérő infra kapukkal) - munkafüzet 10. oldal
- Az egyenletes körmozgás kinematikai vizsgálata (lemezjátszó forgó korongjával) – munkafüzet 17. oldal
- A vízszintes hajítás kinematikája (emelt szint) – munkafüzet 20. oldal

A harmonikus rezgőmozgás

- A mozgás jellemzői: két szélső helyzet között végbemenő periodikus (időben ismétlődő) mozgás.
- Jellemző mennyiségek:
 - T** – rezgésidő (periódusidő): egy teljes rezgés (a két szélső helyzet között oda-vissza) megtételéhez szükséges idő.
 - f** – frekvencia (rezgésszám): időegységenként végbemenő rezgések száma **Hz (1/s)** –ben.
 - ω** – körfrekvencia: időegységenként végbemenő rezgések száma szögben (radiánban). Mértékegysége **1/s**. Egy teljes rezgésnek megfelelő szög **2π** (radián).
 - y** vagy **x** – kitérés: a rezgő tömegpont egyensúlyi helyzetétől (középhez) a tárgy egy adott pillanati helyzetéig mért távolság. A kitérés lehet pozitív vagy negatív attól függően, hogy a rezgő pont a középhez felett vagy alatt található az adott pillanatban. A kitérés idő függvényében változik.
 - A** – amplitúdó (a rezgés tágassága): a legnagyobb kitérés. Ha egy rezgőmozgás csillapítatlan, akkor **A** időben állandó, ha a rezgés csillapított, akkor az amplitúdó időben csökken.
- A rezgőmozgás sebessége, gyorsulása időben változó mennyiségek.
- Ha a rezgés kitérése, sebessége, gyorsulása idő szerint **sin** vagy **cos** függvények, akkor a rezgőmozgás harmonikus. Ilyen mozgás például egy rugóra akasztott tárgy (rugalmas inga) rezgései, vagy a fonálinga lengései. Ha az amplitúdó időben állandó, akkor csillapítatlan harmonikus rezgésről vagy lineáris-harmonikus rezgésről beszélünk. Ez egy ideális eset. A rugalmas inga és a fonálinga mozgása lineáris-harmonikus lenne, ha semmiféle fékező hatás nem akadályozná az ingák rezgéseit.



A kitérés-, sebesség- és gyorsulás-idő összefüggések egy grafikonon

- A mozgást leíró törvények:

A kitérés törvénye:

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

A sebesség törvénye:

$$v = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

A gyorsulás törvénye:

$$a = -\omega^2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

- Egyéb összefüggések: $v_{\max} = \omega A$ $a_{\max} = \omega^2 A$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$
- Ha kezdeti állapotában ($t=0$ pillanatban) a rezgő tömegpont nem az egyensúlyi helyzetben halad át pozitív irányban ($x=0$, $v=+\omega A$), akkor a mozgást leíró egyenletekben a **sin** és **cos** függvények változója (ωt)-ről ($\omega t + \varphi_0$)-ra módosul. φ_0 a rezgés kezdeti fázisa radiánban.
Ha $t=0$ pillanatban a rezgés kitérése x_0 , akkor $x_0 = A \sin \varphi_0$.
- A rezgőmozgást leíró egyenletek az egyenletes körmozgásból származtathatók úgy, hogy a körön mozgó tömegpontot levetítjük egy a mozgás síkjába eső egyenesre. A körön mozgó pont vetülete lineáris-harmonikus rezgőmozgást végez, a mozgás amplitúdója megegyezik a körpálya sugarával, a körmozgás szögsebessége megadja a rezgések körfrekvenciáját.
- Kis szögkitérésekkel lengő matematikai inga (fonálinga) lengésideje:

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

ahol l a fonál hossza, g a gravitációs gyorsulás.

A hullámmozgás

- Ha egy rugalmas közeg valamely pontjában egy zavart (perturbációt) keltünk, akkor ez a pont lendületet közvetít a közeg szomszédos pontjainak, melyek rendre továbbítják a mozgást. Egy idő után a közeg pontjainak egy része mozgásba jön. Azt is mondhatjuk, hogy a közeg pontjai mozgást és energiát továbbítanak szomszédjainak. Ezt a folyamatot nevezzük mechanikai hullámnak. A hullám nem más mint egy rugalmas közegben terjedő rezgés. Ha a közeg egy pontja folyamatos rezgéseket végez (pl harmonikus rezgés) akkor a hullám folyamatosan terjed a közegben és a közeg minden pontja folyamatos rezgésben van. Például, ha egy kifeszített kötél egy végét folyamatosan le-fel mozgatjuk, akkor a kötélen egy hullám terjed végig melynek következményeként a kötél minden pontja egy idő után rezegni fog. Ha egy kavicsot ejtünk egy sima vízfelszínre, akkor a felületen lévő víz ré-

szecskék hullámozó mozgásba kezdenek. Ez a hullám koncentrikus körök formájában terjed. Ilyenkor felületi hullámról beszélünk.

- A hullámokat két féle kategóriába sorolhatjuk:

Longitudinális hullámról beszélünk, ha a hullám terjedése közben a közeg részecskéi a hullám terjedési iránya mentén rezegnek. Pl: hang

Transzverzális a hullám, ha a hullám terjedése közben a közeg részecskéi a hullám terjedési irányára merőlegesen rezegnek. Pl egy kifeszített huzalom terjedő hullám.

Transzverzális hullám nem terjedhet gáznemű közegben a közeg részecskéi közötti gyenge kapcsolat miatt.

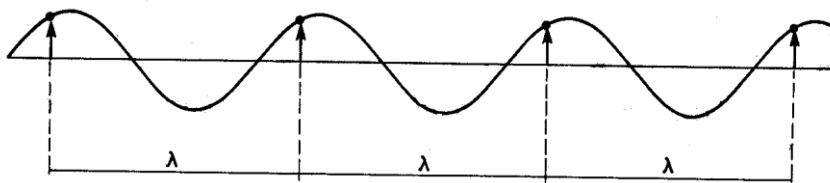
A továbbiakban olyan hullámról beszélünk mely esetében a rezgésforrás harmonikus oszcillátor, a rugalmas közegben pedig a hullám energiaveszteség nélkül terjed. Ez azt jelenti, hogy a közeg minden pontja azonos amplitúdóval és frekvenciával rezeg.

- A hullámokra jellemző mennyiségek:

Amplitúdó (**A**), frekvencia (**f**), periódusidő (**T**), körfrekvencia (**ω**) melyek lényegében a rezgésforrás jellemzői.

Hullámhossz (**λ**): a hullámot közvetítő rugalmas közeg két olyan szomszédos pontja közötti távolság melyek fázisban rezegnek. (azonos pillanatban haladnak át ugyanabban az irányban az egyensúlyi helyzeten, valamint szélső helyzeteken). Belátható, hogy a hullám egy periódusnyi idő alatt hullámhossznyi utat halad előre. Tehát:

$$\lambda = v \cdot T$$



ahol v a hullám terjedési sebessége, mely a rugalmas közeg tulajdonságaitól függ.

Longitudinális hullám esetén: $v = \sqrt{RT}$ ideális gázok esetén, $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ rugalmas rudakban

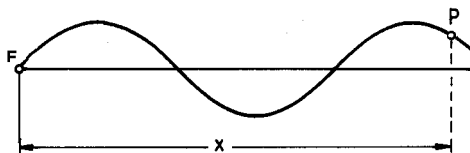
Transzverzális hullám esetén: $v = \sqrt{\frac{F \cdot l}{m}}$ kifeszített huzalban.

➤ A hullámegyenlet (emelt szint):

Ha a hullámforrás egy harmonikus oszcillátor (**F**) melynek rezgéstörvénye:

$$y_F = A \cdot \sin \omega \cdot t = A \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T}$$

akkor egy F_x irány mentén a rezgésforrástól x távolságra található **P** pont kitérése (y) az idő függvényében:



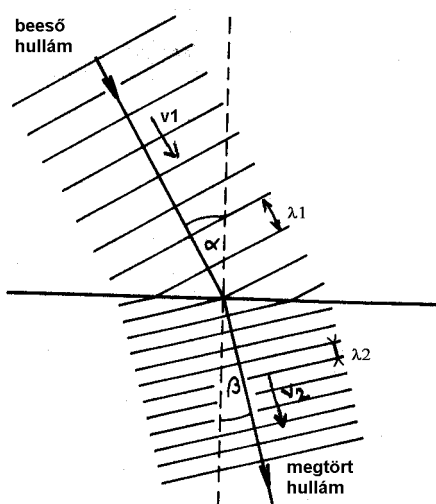
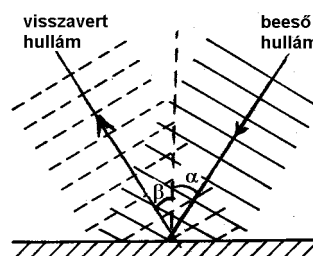
$$y_P = A \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

az illető pont fáziseltérése a hullámforráshoz képest

$$\varphi_0 = -\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{\lambda}$$

- a közeg két pontjának fáziskülönbsége: $\Delta\varphi = \frac{2 \cdot \pi \cdot |x_1 - x_2|}{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta x}{\lambda}$, ahol x_1 és x_2 a pontok távolsága a hullámkeltőtől, Δx a hullámok útkülönbsége.
- A hang egy longitudinális hullám mely levegőben kb. 340 m/s sebességgel terjed. Fémekben és folyadékokban a terjedési sebesség nagyobb. A hallható hangrezgések frekvenciatartománya 20Hz-20000Hz. A hang magasságát a frekvenciája adja meg, a hang erősségét a rezgések amplitúdója.
- Hullámokkal kapcsolatos jelenségek:

Hullámvisszaverődés, hullámtörés: ha egy hullám két különböző rugalmas közeg határfelületére érkezik, akkor egyrészt visszaverődik megváltoztatva terjedési irányát, másrészt, pedig átlépi a választófelületet megváltoztatva hullámhosszát (a terjedési sebesség változása miatt). Ilyenkor, ha a beeső hullám terjedési iránya nem merőleges a határfelületre, akkor megváltozik a terjedési iránya is. Ha a második közeg rugalmas szempontból sűrűbb, mint az első ($v_2 < v_1$) akkor a hullám a „merőlegeshez törik”, ellenkező esetben ($v_2 > v_1$) a „merőlegestől törik”. Ennél a második esetben túl nagy beesési szög esetén megtörténhet, hogy a hullám már nem lép át a határfelületet, tehát a törés jelensége nem lép fel. Ilyenkor teljes visszaverődésről beszélünk. A határszög (α_H) az a legnagyobb beesési szög mellynél a hullám még átlépi a választófelületet. Ha $\alpha > \alpha_H$ a törés megszűnik.



- A visszaverődés törvénye: visszaverődési szög = beesési szög ($\alpha = \beta$)

- A törés törvénye (Snellius-Descartes):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \text{ ahol } \beta \text{ a törési szög.}$$

A határszög: $\alpha_H = \sin^{-1}\left(\frac{v_1}{v_2}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$

Hulláminterferencia (összetevődés): Ha egy rugalmas közeg egy pontjába egyidejűleg két vagy több hullám (rezgés) érkezik akkor ezek összetevődnek. Lényegében ilyenkor két vagy több rezgőmozgás összetevődéséről van szó. Két vagy több rezgés összetevődésekor a kitéréseket, sebességeket, gyorsulásokat vektorként adjuk össze. Ha az illető pontba két harmonikus rezgés érkezik, melyeknek frekvenciája és rezgésiránya megegyezik:

$$y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) \text{ és}$$

$$y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{02})$$

akkor a keletkező rezgés egyenlete:

$$y = \sum y = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \text{ ahol}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos \varphi_{02}}$$

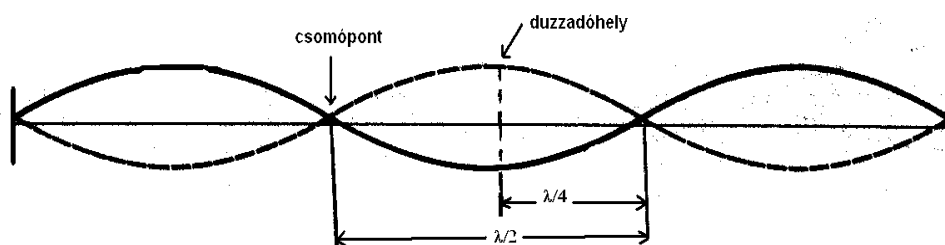
$$\varphi_0 = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{A_2 \cdot \sin \varphi_{02}}{A_1 + A_2 \cdot \cos \varphi_{02}}\right)$$

Észrevehető, hogy a két rezgés maximálisan erősíti egymást (**$A=\max$**), ha **$\varphi_{02}=2k\pi$** , ami azt jelenti, hogy az összetevődő két rezgés fázisban van, tehát a fáziskülönbségük **$\Delta\varphi=2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)**. A két rezgés gyengíti egymást (**$A=\min$**) ha **$\varphi_{02}=\Delta\varphi=(2k+1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)**. Ha az összetevődő két hullámra gondolunk, akkor az eredő amplitúdó a lehető legnagyobb, vagyis interferencia maximumról (erősítés) beszélünk, ha az összetevődő hullámok útkülönbsége

$$\Delta x = \frac{\lambda \cdot \Delta\varphi}{2 \cdot \pi} = k \cdot \lambda = 2 \cdot k \cdot \frac{\lambda}{2}.$$

Interferencia minimumról (gyengítés) beszélünk, ha

$$\Delta x = (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

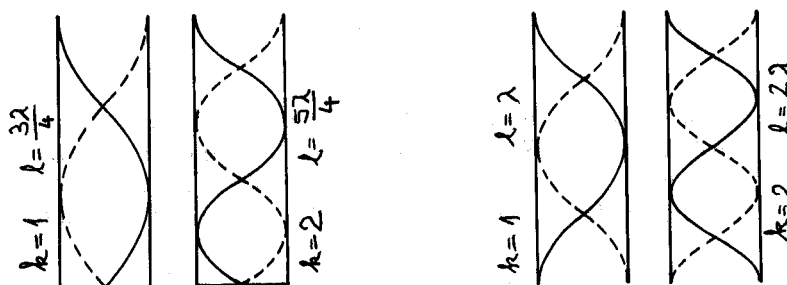


Az interferencia egy érdekes esetét figyelhetjük meg, ha egy hullám visszaverő felület felé terjed és az onnan visszaverődő hullám összetevődik a direkt hullámmal. Ilyenkor állóhullám keletkezik, ami annyit jelent, hogy a közeg pontjainak amplitúdója időben állandó, az amplitúdó mértéke a pont helyzetétől függ. Vannak olyan pontok melyek maximális amplitúdóval rezegnek (duzzadóhelyek) és vannak olyan pontok melyek nem rezegnek tehát $A=0$ (csomópontok). Ilyen jelenség figyelhető meg egy kifeszített húron melynek egyik vége harmonikus rezgéseket végez, másik vége rögzített.

Ugyancsak állóhullámok keletkeznek egy megpendített gitárhúron, vagy egy megfűjt sípban is.

Egy rögzített végű húron vagy lemezen akkor alakulnak ki állóhullámok, ha a húr hossza

$$l = k \cdot \frac{\lambda}{2} \text{ ahol } k \text{ természetes szám.}$$



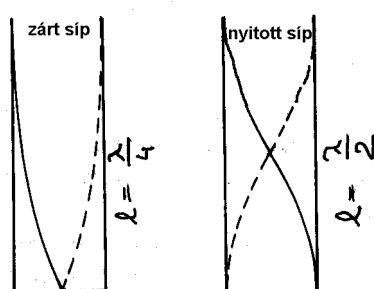
Felhangok zárt és nyitott sípokon

Két szomszédos duzzadóhely távolsága $\frac{\lambda}{2}$, egy duzzadóhely és a szomszédos csomópont távolsága $\frac{\lambda}{4}$.

Egy megpendített gitárhúron több állóhullám is megjelenik. Ezek frekvenciája:

$$f_k = \frac{(k+1) \cdot v}{2 \cdot l}, \quad k=0 \text{ alaphang, } k>0 \text{ } k\text{-ad rendű felharmonikusok.}$$

Megpendített húr esetén az alaphang erőssége (rezgések amplitúdója) a legnagyobb, a felharmonikusoké kisebb. Az alaphang és felharmonikusok együttese adja meg a hangszínt, azért színes a húr által kibocsátott hang, mert egyszerre több hangot hallunk.



Alaphang zárt és nyitott sípokon

Ugyanez az összefüggés érvényes mindkét végén nyitott gázoszlopban (nyitott síp) kialakuló hang állóhullámokra is.

Ha a gázoszlop egyik végén nyitott, másik végén zárt (zárt síp) akkor:

$$f_k = \frac{(2 \cdot k + 1) \cdot v}{4 \cdot l}, \quad k=0 \text{ alaphang, } k>0 \text{ } k\text{-ad rendű felharmonikusok.}$$

2. A tömegpont dinamikája.

- Ez a fejezet a mozgások okát vizsgálja.

Newton törvényei:

Newton I. törvénye, vagy a tehetetlenség elve.

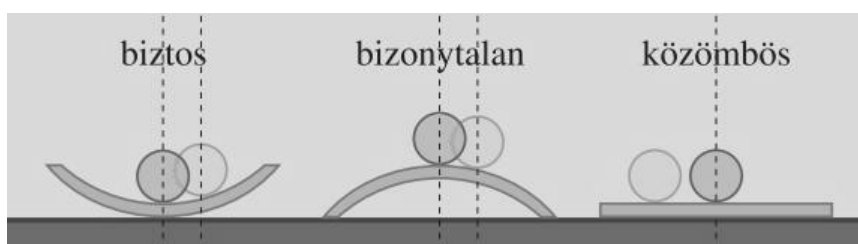
- Egy magára hagyott tárgy megőrzi nyugalmi vagy egyenes vonalú egyenletes mozgásállapotát. Egy tárgy magára van hagyva, ha semmilyen más tárggyal vagy mezővel nincs mechanikai kölcsönhatásban.
- A tehetetlenség a testeknek az a tulajdonsága miszerint megpróbálják megőrizni nyugalmi, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgásállapotukat. Mondhatjuk, hogy a magukra hagyott testek tehetetlenek. Annál tehetetlenebb egy test minél nagyobb a tömege. Ezért a tömeg az a skaláris fizikai mennyiség mely a testek tehetetlenségét jellemzi. Jele ***m***, SI mértékegysége ***kg***. A tehetetlenség elve tulajdonképpen a testek tehetetlenségének megnyilvánulását fejezi ki.

Newton II. törvénye, vagy az erőhatások elve.

- Ha két test mechanikai kölcsönhatásba kerül, akkor megváltozik a mechanikai állapotuk. Ez az állapotváltozás lehet alakváltozás vagy mozgásállapot-változás (sebesség vektorának megváltozása). Ha a tömegpontról beszélünk nincs értelme alakváltozásról beszélni.
- A testek kölcsönhatásának mértékét egy vektoriális fizikai mennyiséggel fejezzük ki. Ez az erő. Az erővektor jele $\vec{F}$, SI mértékegysége newton (N).
- A II. törvény kijelentése: Ha egy magára hagyott tömegpontra erő hat, akkor ez az erő a tömegpontnak gyorsulást okoz ($\vec{a}$). A gyorsulás egyenesen arányos az erő mértékével. A gyorsulás vektor iránya és irányvonala megegyezik az erő vektorával. Ha egyszerre több erő is hat a tömegpontra, akkor a gyorsulás kiszámításánál az eredő erővektort kell számításba venni. ($\sum \vec{F}$). A II. törvény matematikai kifejezése:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \text{ - ezt a kifejezést nevezzük a dinamika alapegyenletének.}$$

- Ezek szerint egy newton az az erő, mely egy **1kg** tömegű testnek $1 \frac{m}{s^2}$ gyorsulást idéz elő az erő irányába.
- A tömegpont egyensúlyi feltétele: Ha $\sum \vec{F} = 0$ akkor a tömegpont egyensúlyban van, vagyis nyugalomban van, vagy egyenes vonalban egyenletesen mozog.
- Egy egyensúlyi helyzet lehet:



Newton III. törvénye, vagy a hatás-ellenhatás törvénye.

- Két test kölcsönhatásakor mindig két erő lép fel. Az egyik erő az egyik test részéről hat a másodikra (erő), a másik erő a második test részéről hat az elsőre (ellenérő). Az erő és ellenérő mindig azonos nagyságú (tehát a kölcsönhatásba lépő testek tömegétől és mechanikai állapotuktól függetlenül!!), egy egyenesbe esnek, de irányításuk ellentétes. Ezek szerint a mechanikában az erők mindig párosával jelentkeznek. Pl: Ha két különböző méretű és tömegű golyó ütközik, akkor a közöttük fellépő erő azonos, vagyis az első golyó ugyanakkora erővel hat a másodikra, mint a második az elsőre.

Jellegzetes mechanikai erőtípusok.

- **A gravitációs erő:** az az erő mellyel a Föld vonzza a tárgyakat. Iránya a Föld középpontja felé (függőlegesen lefelé). Kiszámítása: $\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}$ ahol $g = 9,81 \frac{m}{s^2} \approx 10 \frac{m}{s^2}$ a gravitációs gyorsulás Budapesten.
- **A súly:** az az erő amivel a felfüggesztett tárgyak húzzák a felfüggesztést, vagy az alátámasztott tárgyak nyomják az alátámasztást. Ez az erő tehát az alátámasztásra vagy felfüggesztésre hat. Iránya függőlegesen lefelé. Jele $\vec{G}$. Ha az alátámasztás vagy felfüggesztés a tárggyal együtt nyugalomban van, vagy

egyenletesen mozog egyenes vonalban akkor: $G=mg=F_g$. Pl. nyugalomban vagy egyenletesen mozgó liftben álló ember súlya $G=mg$. Ha az alátámasztás vagy felfüggesztés a tárggyal együtt $\vec{a}$ gyorsulással mozog felfelé, akkor $G=m(g+a)$, ha lefelé gyorsulnak, akkor $G=m(g-a)$. Ha az alátámasztás vagy felfüggesztés szabadon esik a tárggyal (g gyorsulással lefelé) akkor $G=0$. Ilyenkor beszélünk a súlytalanság állapotáról.

- **Kényszererők:** A legismertebb kényszererők a tartóerő és a kötél(fonál)erő. Ha egy tárgy egy felülettel áll kölcsönhatásban (rajta nyugszik vagy neki támaszkodik), akkor a felület erőt fejt ki a tárgyra. Ez a tartóerő ($\vec{F}_t$). Ha egy tárgy felületen nyugszik, akkor F_t a súly ellenereje, tehát $\vec{F}_t = -\vec{G}$. Ha egy tömeg nélküli fonalat a két végénél megfeszítünk, akkor egy erő ébred a kötélen. Ez az erő a kötélen bármely pontjában azonos nagyságú. Jele $\vec{F}_k$ vagy $\vec{K}$. Ha egy tárgyat kötélen felfüggesztünk, akkor a tárgyat a kötélerő tartja. Ebben az esetben F_k a súly ellenereje.

➤ **Súrlódási erők:**

A tapadási súrlódás: legyen két egymással érintkező felület. Ha az egyik felületet el szeretnénk csúsztatni a másikon, azt tapasztaljuk, hogy valami gátló hatás ezt nem engedi. Azt mondjuk, hogy a két felület között létrejött egy tapadási súrlódás, mely meggátolja a felületek elcsúszását egymáson. A tapadási súrlódás mértéke a felületek érdességétől valamint a felületeket összenyomó erőből függ (F_{ny}). Felületek érdességét a tapadási tényező jellemzi ($\mu_0 > 0$). A tapadási súrlódási erő iránya az érintkező felületek síkjában van. Kiszámítási képlete:

$$F_{s0} = \mu_0 \cdot F_{ny}$$

A csúszási súrlódás. Ha két felület egymáson csúszik, akkor a felületek érdessége miatt egy olyan erő jön létre mely a két egymáson csúszó felület egymáshoz viszonyított sebességét csökkenti ígyekszik. Ez az erő az érintkező felületek síkjában van, a mozgással ellentétes irányú. Az egymáson csúszó felületek érdességét a csúszási tényező jellemzi (μ_0). A csúszási súrlódási erő függ a felületeket összenyomó merőleges erőből (F_{ny}). Kiszámítási képlete:

$$F_s = \mu \cdot F_{ny}, \mu < \mu_0.$$

Ha egy test szabadon csúszik egy vízszintes felületen, akkor $F_{ny}=mg$.

Ha egy test α hajlásszögű lejtőn csúszik, és a tárgyra a lejtőre merőleges irányban csak a gravitációs erő komponense hat, akkor: $F_{ny}=mg\cos\alpha$.

A súrlódási erők nem függnak az érintkező felületek nagyságától, ha a felületek egyenletesen vannak megmunkálva, tehát érdességük egyenletes.

- **A Newton féle általános tömegvonzás:** Newton szerint bármely két tömeggel rendelkező test gravitációs vonzerőt gyakorol egymásra. Ez az erő nem függ a két test közötti anyagi közegtől csak a tömegektől (m_1, m_2) és a közöttük lévő távolságoktól (r). Két pontszerűnek tekinthető test közötti gravitációs vonzerő:

$$F_g = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

ahol $\gamma=6,672 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$ általános tömegvonzási állandó.

Ha alkalmazzuk ezt a törvényt a Föld és felszínén található tárgy esetére akkor a Föld felszínén mérhető gravitációs gyorsulás:

$$g_0 = \gamma \cdot \frac{M_{Föld}}{R_{Föld}^2}$$

ahol $M_{Föld}$ a Föld tömege, $R_{Föld}$ a Föld sugara az adott helyen.

A bolygókat és műholdakat a gravitációs tömegvonzás tartja zárt görbe vonalú pályán. Az egyszerűség kedvéért feladatokban ezeket a pályákat kör alakúnak tekintjük, a testek mozgása egyenletes.

- **A centripetális és centrifugális erő:** A két erő nem nevez meg új kölcsönhatásokat. A centripetális erő az az erő mely a körpályán mozgó tömegpontot a pályára kényszeríti, tehát az egyenletes körmozgást fenntartja. Ez az erő okozza a centripetális gyorsulást, tehát ennek az erőnek tulajdonítható a sebesség vektorának irányváltozása. A centrifugális erő az a centripetális erő ellenereje, tehát azzal ellen-

tétes irányú, de azzal azonos nagyságú. Ez az erő nem a körön mozgó tömegpontra, hanem a kényszerítő tárgyra hat. Kiszámítási képletek:

$$F_{cp} = F_{cf} = m \cdot a_{cp}, \vec{F}_{cp} = -\vec{F}_{cf}$$

Pl: A mosógép dobjában egy ruhadarab a dobhoz tapadva egyenletes körmozgást végez. A centripetális erő a zoknira hat és ez tartja a zoknit körpályán (ebben az esetben ez nem más mint a dob falának kényszer vagy tartó ereje), a centrifugális erő az a dobra hat és ezt nyomja, feszíti.

- **Rugalmas típusú erő:** A lineáris-harmonikus rezgőmozgás fenntartásához szükséges erő. Az erő mindig a rezgő tárgy kitérésével ellentétes irányú, de azzal egyenesen arányos. A lineáris-harmonikus rezgés kialakulásának dinamikai feltétele:

$$F = -D \cdot y, \text{ ahol } D \text{ a rugalmassági állandó, } y \text{ a kitérés.}$$

Pl: egy rugalmas inga esetében a rugó erejének és a gravitációs (nehézségi) erőnek az eredője rugalmas típusú.

- **Rugóerő:** megnyújtott vagy összenyomott rugóban ébredő erő. A rugóerő mindig az alakváltozással ellentétes irányú és megpróbálja semlegesíteni a rugó alakváltozását. Kiszámítása:

$$F_r = -D \cdot \Delta l = -D \cdot x, \text{ ahol } D \text{ a rugóállandó, } \Delta l \text{ vagy } x \text{ a rugó alakváltozása.}$$

Pl: egy felhúzott rugós játék pisztoly esetében, a rugóerő lövi ki a golyót.

- **Nem kölcsönhatásból származó erők (tehetetlenségi erők):** Képzeljünk el egy teherautót melynek tökéletesen sima, súrlódásmentes rakfelületén egy láda található. Ha az autó egyenletesen halad egyenes vonalban, akkor a láda a földhöz képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, míg az autóhoz képest nyugalomban van. Azt mondjuk, hogy mindkét vonatkoztatási test tehetetlenségi rendszer (inerciarendszer), mert teljesül a tehetetlenség elve.

Mi van akkor, ha az autó hirtelen fékez (lassul)?

Beláthatjuk, hogy miközben a láda a rakfelülethez képest gyorsulva csúszik előre, a földhöz képest tehetetlensége miatt, erőhatás hiányában megőrzi egyenes vonalú egyenletes mozgásállapotát, amíg nem ütközik a rakfelület oldalához. A láda gyorsulása a rakfelülethez képest azonos az autó gyorsulásával a földhöz képest, de azzal ellentétes irányítású. A magára hagyott láda tehát a rakfelülethez képest gyorsul. Ebben az esetben tehát a rakfelülethez vonatkoztatva nem teljesül a tehetetlenség elve, ezért az ilyen vonatkoztatást nem tehetetlenségi (nem inercia) rendszereknek nevezzük. A láda külső hatás, erő nélkül gyorsul a rakfelülethez képest, miközben az autó lassul. Ilyen esetben Newton II. törvénye sem teljesül. Hogy megőrizzük e törvény érvényességét ilyen rendszerekben is, bevezetjük a tehetetlenségi erő fogalmát. Ez egy olyan erő mely nem kölcsönhatásból, hanem a testek tehetetlenségéből származik, és ez az erő magyarázza jelen esetben a láda gyorsulását a rakfelülethez képest miközben az autó lassul.

Ilyen erőről tehát csak nem tehetetlenségi (gyorsuló) rendszerekben beszélünk. A tehetetlenségi erő iránya ellentétes a vonatkoztatási rendszer gyorsulásának irányával, nagysága pedig:

$$\vec{F}_{\text{teh}} = -m_{\text{test}} \cdot \vec{a}_{\text{rendszer}}$$

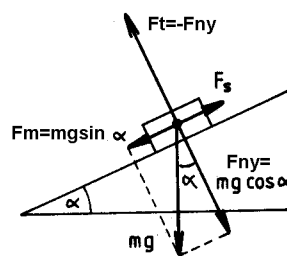
Görbe vonalú mozgást végző rendszerekben ható sugárirányú tehetetlenségi erőket centrifugális tehetetlenségi erőknél nevezzük. Ha az előző teherautó egyenletesen kanyarodik körív alakú kanyarban, akkor a láda sugárirányban gyorsul kifelé a rakfelülethez képest. Ezt a centrifugális tehetetlenségi erővel magyarázzuk.

$$\vec{F}_{\text{cfi}} = -m \cdot \vec{a}_{\text{cp}}$$

ahol a_{cp} az autó centripetális gyorsulása a kanyarban.

Testek mozgása a lejtőn

Legyen egy m tömegű test melyet, magára hagyunk egy sík lejtőn. Elég gyenge súrlódás esetén a tárgy a gravitációs erő hatására lecsúszik. A gravitációs erőnek két hatása is van. Egyrészt mozgatja a testet lefelé a lejtőn, másrészt odanyomja a lejtőhöz. Ezért a mozgás vizsgálatakor a gravitációs



erőt két összetevőre (komponensre) bontjuk. Egyik összetevő a lejtővel párhuzamos irányú ezt nevezzük mozgató erőnek (F_m), a másik erre merőleges, ez a nyomó erő (F_{ny}).

Ha a tárgy súrlódásmentesen csúszik lefelé akkor Newton második törvénye szerint :

$$F_m = m \cdot a, F_t - F_{ny} = 0$$

Az ábra szerint: $F_m = m \cdot g \cdot \sin \alpha$
 $F_{ny} = m \cdot g \cdot \cos \alpha$, α - a lejtő hajlásszöge

Tehát $a = g \cdot \sin \alpha$.

Ha a tárgy súrlódással gyorsul lefelé, akkor $F_m - F_s = m \cdot a$.

Mivel $F_s = \mu \cdot F_{ny} \Rightarrow a = g \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha)$.

Elég erős tapadási súrlódás esetén a lejtőre helyezett tárgy nyugalomban marad a lejtőn. Ez akkor történik, ha $F_{s0} \geq F_m$, vagyis ha $\mu_0 \geq \tan \alpha$. Az $\alpha = \tan^{-1}(\mu_0)$ értéket a lejtő súrlódási szögének nevezzük.

Ha a tárgyat a lejtő aljától kezdősebességgel indítjuk felfelé, akkor lassulása: $a = -g \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha)$.

A tömegpont lendülete (impulzusa)

- A lendület egy olyan vektormennyiség mely megadja, hogy mennyire képes egy mozgó tárgy egy másikat feldönteni, felborítani, magával sodorni stb. Ezért ez a mennyiség a tömegpont tömegének és sebességvektorának szorzata.

$$\vec{I} = m \cdot \vec{v}$$

- A lendület mértékegysége: $kg \cdot \frac{m}{s}$.

A lendületváltozás törvénye tömegpont esetén:

Egy tömegpont lendületváltozása (**$\Delta \vec{I}$**) egyenlő a tömegpontra ható eredő erőlökéssel (**$\vec{H}$**). Az erőlökés egyenlő az eredő erő és a erőhatás időtartamának szorzatával..

$$\Delta \vec{I} = \sum \vec{H} = \sum \vec{F} \cdot \Delta t$$

Ez a törvény egyenértékű Newton II. törvényével.

Ha a tömegpontra semmiféle erő nem hat, akkor lendülete állandó marad, tehát nyugalomban van vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

A mechanikai munka és teljesítmény. A határfok

- Fizikai értelemben akkor beszélünk **munkavégzésről**, ha egy erő egy tárgyat bizonyos távolságon elmozdít. Ha a mozgatóerő (**F**) állandó, az elmozdulás az erő irányvonala mentén történik az erő irányába (**s**), akkor a végzett munka, avagy az erő munkája:

$$W = F \cdot s$$

Ha mozgatóerő **α** szöget zár be az elmozdulás irányával akkor:

$$W = F \cdot s \cdot \cos \alpha$$

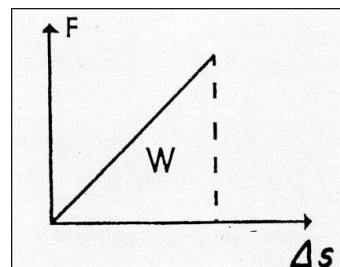
A munka skaláris mennyiség, mértékegysége **$1J$ (joule)**. A munka legáltalánosabb meghatározása:

$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ = az erő és elmozdulás vektor skalár szorzata, ahol $\vec{s}$ az elmozdulás vektora.

A munkavégzés **$1J$** , ha **$1N$** nagyságú erő egy tárgyat 1m távolságon mozdit el saját támadásvonala mentén.

A munkavégzés pozitív, ha az erő hozzájárul az elmozduláshoz, negatív ha az erő fékezi az elmozdulást.

Változó erő munkáját grafikus módszerrel számíthatjuk ki. Ábrázoljuk az erőt (F) az erő irányába történő elmozdulás függvényében ($x=\Delta s$). A végzett munka számszerűen megegyezik az erő grafikonja „alatti” területtel. Ez a terület kiszámítható, ha ez egy ismert geometriai idom.



- **A mechanikai teljesítmény** a munkavégzés gyorsaságát jellemző skaláris mennyiség. Beszélünk átlagteljesítményről és pillanatnyi teljesítményről. Az átlagteljesítmény egyenlő a végzett munka és az ehhez szükséges idő hányadosával.

$$P_{\text{á}} = \frac{W}{\Delta t}$$

A pillanatnyi teljesítményt egy nagyon rövid időtartamra számítják.

$$P = \left. \frac{W}{\Delta t} \right|_{\Delta t \rightarrow 0}$$

A teljesítmény mértékegysége a watt. Egy munkagép vagy egy erő átlagteljesítménye $\mathbf{1W}$, ha $\mathbf{1J}$ munkát végez $\mathbf{1s}$ alatt.

Ha az erő állandó (F), a tömegpont állandó sebességgel (v) mozog az erő irányvonala mentén akkor az erő teljesítménye:

$$P = F \cdot v$$

- **A hatásfok:** Általában munkavégzéskor több munkát végzünk, mint amekkora szükséges lenne. Ez általában azért van mert munkavégzéskor le kell győznünk a fékező, gátoló hatásokat, vagyis ezek ellenében is munkát kell végezni. A munkavégzés hatásfoka egyenlő a hasznos és befektetett összes munka hányadosával.

$$\eta = \frac{W_{\text{hasznos}}}{W_{\text{befektetett}}} = \frac{P_{\text{hasznos}}}{P_{\text{befektetett}}} < 1$$

A hatásfokot százalékban adjuk meg.

Pl: Vízét akarunk kiemelni a kútból. Ezért munkát végzünk a víz kiemeléséhez, a vödör és a vödört tartó lánc kiemeléséhez, valamint a súrlódások legyőzéséhez. Ezek összegzése adja meg a befektetett munkát. A hasznos munka jelen esetben csak a víz kiemeléséhez szükséges munka.

Erőtípusok munkavégzése

A nehézségi erő munkája, emelési munka

A nehézségi erő munkát végez, ha egy tárgy felfelé vagy lefelé mozog. Bebizonyítható, hogy a nehézségi erő munkája nem függ az elmozdulás pályájának alakjától, csak a kiindulási pont és végpont közötti szintkülönbségtől (magasságtól). A szintkülönbséget függőlegesen mérjük. Ezért a nehézségi erőt *konzervatív erőnek* nevezzük. A nehézségi erő munkája pozitív, ha a tárgy lefelé mozog, negatív, ha felfelé mozog.

$$W_{F_g} = \pm m \cdot g \cdot h$$

pl: ha egy tárgy lecsúszik a lejtőn, akkor a gravitációs erő munkája csak a lejtő magasságától függ, és nem függ a hajlásszögétől.

Emelési munka: Ha egy **m** tömegű tárgyat egyenletesen emelünk **h** magasságba, akkor a gravitációs mező ellenében munkát végzünk. A munkavégzés kiszámítása:

$$W_{emelés} = m \cdot g \cdot h$$

a rugalmas típusú erő munkája, feszítési, nyújtási munka

Ez az erő is konzervatív. A munka kiszámítása:

$$W_{rugalmas} = \pm \frac{D \cdot y^2}{2}$$

a munka lehet pozitív vagy negatív az erő és kitérés irányviszonyától függően. Az erő konzervatív jellege abban is mutatkozik, hogy egy teljes rezgés ideje alatt a rugalmassági erő munkája nulla, mivel ez idő alatt a rezgő test visszatér kiindulási állapotába, tehát a kitérés nulla.

A rugóerő munkája.

Hasonlóképpen ez az erő is konzervatív. A rugóerő munkája: $W_{\text{rugó}} = \pm \frac{D \cdot y^2}{2}$, ahol y a rugó alakváltozása. A rugóerő munkája pozitív vagy negatív attól függően, hogy a tanulmányozott tárgyat vagy rendszert gyorsítja vagy fékezi-e a rugóerő. A rugóerő munkája pozitív miközben megszűnik a rugó alakváltozása és negatív miközben létrejön a rugó alakváltozása.

A csúszósúrlódási erő munkája.

Mivel általában a csúszó súrlódás egy fékező erő:

$$W_{F_s} = -F_s \cdot s = -\mu \cdot F_{ny} \cdot s = -\mu \cdot m \cdot g \cdot s.$$

Természetesen ez az összefüggés csak akkor érvényes, ha a nyomóerőt a test saját nyugalmi súlya biztosítja $(m \cdot g)$. Lejtőn a nyomóerő $F_{ny} = m \cdot g \cdot \cos \alpha$.

Ez az erő nem tartozik a konzervatív erők csoportjába, tehát disszipatív.

A mechanikai energia fogalma. Energiatípusok. Megmaradási, változási törvények.

A mechanikai energia

Egy olyan állapothatározó skaláris fizikai mennyiség, mely egy tárgy vagy fizikai rendszer munkavégző képességét adja meg. Ezért mértékegysége szintén **joule**. Ha egy tárgy adott állapotában **1J** energiával rendelkezik, akkor ez azt jelenti, hogy **1J** munkát képes végezni. Ha állapotváltozás közben elvégzi az **1J** munkát, akkor a mechanikai energiája lecsökken, **zérus** lesz. A következő értelmezés is helyes: ahhoz, hogy egy tárgy zérus energiájú állapotából **1J** energiájú állapotba jusson **1J** munkavégzés szükséges. A mechanikai energia jele **E**.

A mozgási energia:

Ha egy m tömegű tömegpont egy adott pillanatban v sebességgel mozog egy vonatkoztatási rendszerhez képest, mozgási energiával rendelkezik. Ez az energia egyenlő azzal a munkával, amit aközben végeztünk, amikor a tömegpontot nyugalmi állapotából v sebességre gyorsítottuk. Bizonyítható, hogy ez a mozgási energia:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

A mozgási energia megváltozásának törvénye, avagy a munkatétel törvénye:

Egy tömegpont (vagy fizikai rendszer) mozgási energiájának megváltozása egyenlő a tömegpontra ható összes erők mechanikai munkájának összegével vagy a tömegpontra ható eredő erő munkájával.

$$\Delta E_m = E_{mvégso} - E_{mkezdeti} = \sum W = \sum W_{konzervatív} + \sum W_{nemkonzervatív}$$

Az eddig ismert konzervatív erők: gravitációs erő és rugalmassági erő, az összes többi munkavégző erő nem konzervatív (disszipatív).

Itt látszik a mechanikai munka előjelére vonatkozó szabály fontossága. Ha $W < 0$, akkor $\Delta E_m < 0$; vagyis fékező erő mozgási energia csökkenést idéz elő.

A gravitációs helyzeti (potenciális) energia:

Ha egy m tömegpont homogén gravitációs mezőben egy bizonyos magasságban található (h), akkor helyzeti energiával rendelkezik, mert ha ebből a magasságból szabadon engedjük munkát képes végezni. Pl: egy bizonyos magasságból lezúduló víztömeg egy vízi erőmű lapátkerekeit hajthatja meg. Ez a helyzeti energia egyenlő azzal a munkával, amit akkor végeznénk, ha a tömegpontot a nulla szintről egyenletesen h magasra emelnénk. Nulla szint (viszonyítási szint) az a magassági szint, ami alá a tömegpont állapotváltozása során nem kerül. Ez általában a Föld felszíne.

$$E_{hg} = m \cdot g \cdot h$$

A nulla szintet önkényesen választhatjuk meg. Ha a tömegpont a nulla szint alá kerül, akkor a helyzeti energiája negatív. Az ilyen választást, ha lehet mellőzzük!

A helyzeti energia megváltozásának törvénye:

Egy tömegpont vagy fizikai rendszer gravitációs helyzeti energiájának megváltozása egyenlő, de ellenkező előjelű a gravitációs erő munkájával.

$$\Delta E_h = -W_{\text{gravitációs}}$$

A negatív előjel a fenti törvényben nyilvánvaló, mert a helyzeti energia növekedésekor (emelés $\Delta E_h > 0$) a gravitációs erő ellenálló erő tehát munkája negatív.

A rugalmas helyzeti (potenciális) energia:

Ha egy tárgy vagy fizikai rendszer rugalmas erő hatása alatt található, energiával rendelkezik. Pl. Ha egy rugó alakváltozással rendelkezik, akkor energiát tárol magában, mert ha magára hagyjuk munkát képes végezni, miközben megszűnik az alakváltozása. Lineáris harmonikus oszcillátor esetén is beszélünk rugalmas potenciális energiáról, mivel a mozgást előidéző erő rugalmas típusú.

Összenyomott vagy kinyújtott rugó esetén a tárolt energia egyenlő azzal a munkával, amit akkor végeznénk, ha az alakváltozás nélküli rugónak az adott alakváltozást előidéznénk. Ez az energia mindig pozitív.

$$E_{rh} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot y^2$$

Ha egy csavarrugó energiájáról beszélünk, akkor y a rugó alakváltozása, ha rezgő rendszer teljes potenciális energiáját vizsgáljuk, akkor y a rezgés kitérése.

A rugalmas helyzeti energia megváltozásának törvénye:

A rugalmas helyzeti energia megváltozása egyenlő de ellenkező előjelű a rugalmas erő munkájával.

$$\Delta E_{rh} = -W_{\text{rugalmas}}$$

Pl: Egy rugó összenyomásakor a rugalmas energia növekedik, míg a rugalmas erő az alakváltozás ellenében dolgozik ezért a munkája negatív. Nyilvánvaló tehát a fenti összefüggésben a negatív előjel.

A helyzeti (potenciális) energia fogalmának általánosítása:

Minden konzervatív erőmező rendelkezik potenciális energiával. Ha egy tárgy vagy fizikai rendszer konzervatív erőmezőben található, akkor potenciális energiával rendelkezik. A potenciális energia megváltozásának törvénye általánosítható bármely konzervatív erő esetére:

$$\Delta E_p = -W_{\text{konzervatív}} \text{erő}$$

A mechanikai energia:

Egy tárgy vagy fizikai rendszer adott állapotához rendelhető mechanikai energiáján az összes energia-típusok algebrai összegét értjük.

$$E = E_m + E_{\text{konzervatív}} = E_m + E_p$$

A mechanikai energia megváltozása, megmaradása:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta(E_m + E_p) = \Delta E_m + \Delta E_p = (W_{\text{összes}}) + (-W_{\text{konzervatív}}) = \\ &= (W_{\text{konzervatív}} + W_{\text{nemkonzervatív}}) + (-W_{\text{konzervatív}}) = W_{\text{nemkonzervatív}} \end{aligned}$$

Tehát: $\Delta E = W_{\text{nemkonzervatív}}$

Ha egy tárgy vagy fizikai rendszer egyik állapotából a másikba kerül, akkor a mechanikai energiájának megváltozása egyenlő a nem konzervatív erők munkájának összegével. Ha mechanikai állapotváltozás esetén csakis konzervatív erők hatnak, akkor a mechanikai energia időben állandó, nem változik. Ez **a mechanikai energia megmaradásának törvénye.**

Mindezt úgy is szoktuk mondani, hogy „az energia nem vész el csak átalakul”. Amennyiben állapotváltozás közben csak konzervatív erők hatnak, egyik energiatípus átalakul a másik típusú úgy, hogy az energiatípusok összege időben állandó.

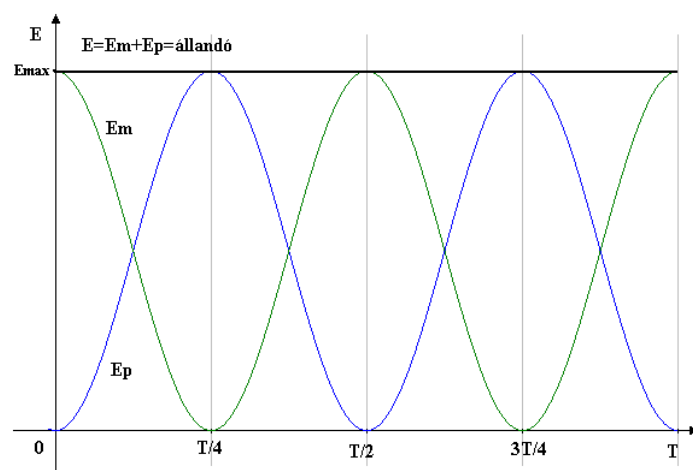
Példák:

Szabadesés közben a tárgy kezdeti helyzeti energiája a földet érés pillanatáig folyamatosan mozgási energiává alakul, a helyzeti és mozgási energiák összege nem változik, állandó. Így tehát szabadesés közben amennyivel csökken a test helyzeti energiája annyival nő a test mozgási energiája.

Egy meglökött szánkó a súrlódás miatt egy bizonyos út megtétele után megáll. A szánkó mozgási energiájának csökkenése egyenlő a csúszó súrlódási munkával, tehát a szánkón végzett súrlódási munka számszerűen egyenlő a szánkó kezdeti energiájával. Úgy is lehetne mondani, hogy a szánkó mozgási energiája súrlódási munkává alakul. (és a súrlódási munkából hőenergia képződik → melegedés).

Lineáris-harmonikus oszcillátor energiája:

Ez a mozgás rugalmas típusú erő hatására megy végbe, ez az erő konzervatív erő, ezért a rezgő rendszer összes energiája időben állandó.

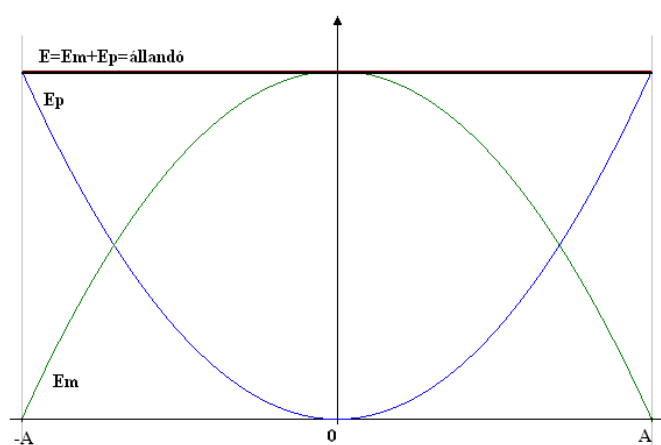


$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) = \frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2 - \frac{1}{2} \cdot D \cdot y^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot D \cdot y^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t)$$

$$E = E_m + E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot D \cdot y^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\max}^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2 = \text{állandó}$$

A rezgő test szélső helyzeteiben ($y=\pm A$): $E = E_p = \frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2$, $E_m = 0$



A rezgő test középhelyzetében ($y=0$): $E = E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\max}^2$, $E_p = 0$

Rezgések közben a rendszer potenciális energiája folyamatosan mozgási energiává alakul és fordítva. A két energiatípus összege a rezgő rendszer minden állapotában ugyanakkora.

Módszertani javaslat:

A dinamika anyagrész összefoglalása után a fogalmak megértése és elsajátítása érdekében célszerű a munkafüzet 22. -40. oldalán található kérdéseit közösen megválaszolni a tanuló csoporttal. Az elméleti kérdések házi feladatként is megválaszolhatók.

Az elméleti fogalmak megértése után elvégezhető a munkafüzet ide vonatkozó mérési feladatai:

- Gumiszál nyúlásának vizsgálata (ragóállandó meghatározása grafikonból) – munkafüzet 40. oldal
- Tapadási súrlódási tényező meghatározása (az előző) gumiszál segítségével – munkafüzet 45. oldal
- A mechanikai energia megmaradásának vizsgálata (emelt szint – lejtőn leguruló gumiszálát megnyújtó kiskocsival) – munkafüzet 47. oldal

3. Pontrendszerek mechanikája

Pontrendszer:

Egy olyan fizikai rendszer, amely több, egymással kölcsönhatásban lévő pontszerű testből áll. Pl: Naprendszerünk, két összeütköző vasúti kocsi, felrobbanó gránát darabjai.

Pontrendszerekre ható erőket két kategóriába soroljuk:

Belső erők: azok az erők, amelyeket a rendszer tagjai fejtik ki egymásra. Ezek az erők mindig párosával lépnek fel, ugyanis mindegyik erőnek van egy ellenereje és ez is belső erő. A belső erők vektori összege egy pontrendszer esetén mindig nulla.

$$\sum \vec{F}_{belső} = 0$$

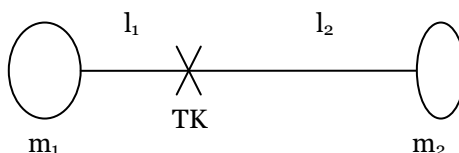
Külső erők: azok az erők, amelyek a rendszer tagjai és a pontrendszerhez nem tartozó tárgyak, mezők között lépnek fel. Ha egy rendszerre nem hatnak külső erők, vagy a külső erők vektori összege nulla, akkor a pontrendszert **zárt rendszernek** nevezzük.

A tömegközéppont:

- egy olyan pont mely jól jellemzi az egész pontrendszer haladását. Két pontszerű testből álló rendszer esetén a tömegközéppont (**TK**) a két testet összekötő egyenes szakaszon van. A testek tömege fordítottan arányos a tömegközépponttól mért távolságukkal.

$$m_1 \cdot l_1 = m_2 \cdot l_2$$

$$l_1 + l_2 = l$$



Megoldva a fenti egyenletrendszert:

$$l_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot l$$

$$l_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot l$$

Ha a pontrendszer n darab tömegpontból áll és a tömegpontok egy XOY síkban helyezkednek el úgy, hogy a helyzetüket $x_1, x_2, \dots, x_n$ abszcisszáik és $y_1, y_2, \dots, y_n$ ordináták határozzák meg, akkor a TK koordinátái:

$$x_{TK} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \dots + m_n \cdot x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

$$y_{TK} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

A tömegközéppontra vonatkozó tételek.

A pontrendszer összes tömegének és a tömegközéppont gyorsulásának szorzata megegyezik a rendszerre ható külső erők vektori összegével. (II newtoni törvény). Egy pontrendszer tömegközéppontja úgy viselkedik, mintha a külső erők támadáspontja a TK lenne.

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{a}_{TK} = \sum \vec{F}_{\text{külső}}$$

ebből az következik, hogy amennyiben egy pontrendszer zárt, a tömegközéppont nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

Példák:

Legyen egy csónak melyben egy ember található. Kezdetben a csónak az emberrel együtt a parthoz képest nyugalomban van, tehát a rendszer tömegközéppontja is nyugalomban van a parthoz viszonyítva. Tételezzük fel továbbá, hogy nem fúj a szél, nem hullámszik a víz, nem létezik semmiféle súrlódás a víz és a csónak között. A külső erők vektori összege vízszintes irányban nulla. Ha az ember lassan elindul a csónakban, akkor a csónak is elindul ellenkező irányba. Az ember erőt fejt ki a csónakra, a csónak is az emberre (belső erőhatások). Mivel nincs külső erőhatás a rendszer tömegközéppontjának helyzete nem változhat meg. Így is magyarázhatjuk a csónak ellenkező irányú elmozdulását.

Egy lövedék szabadon esik. Egy adott pillanatban a lövedék belső erők hatására darabokra robban szét. A darabok különböző irányokban repülnek szét. Mivel a külső erőviszonyok a robbanás közben és után nem változtak, a több darabkából álló pontrendszer tömegközéppontja ugyanúgy esik tovább függőlegesen lefelé, mint ahogyan robbanás előtt esett a lövedék. Tehát a **TK** gyorsulása robbanás után is $\vec{g}$.

Egy pontrendszer összes lendülete egyenlő a rendszer összes tömege megszorozva a tömegközéppont sebességével. Pontrendszer összes lendületén a rendszert alkotó tömegpontok lendületének vektori összegét értjük.

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{v}_i = \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \cdot \vec{v}_{TK}$$

Pontrendszerre vonatkozó törvények.

A lendület-változásának és megmaradásának törvénye:

Egy pontrendszer összes lendületének megváltozása egyenlő a pontrendszerre ható eredő **külső** erő-lökéssel.

$$\sum_{i=1}^n \Delta \vec{I}_i = \sum_{i=1}^n \Delta(m_i \cdot \vec{v}_i) = \sum \vec{F}_{\text{külső}} \cdot \Delta t$$

Ha a pontrendszer zárt, akkor a rendszer összes lendülete nem változhat, tehát időben állandó.

Példa:

Tekintsük a következő pontrendszert: két összeütköző biliárdgolyó. Ütközés következtében csak a belső erők érvényesülnek, ütközés előtt és után a külső erőket elhanyagolhatjuk a golyók mozgásának irányában, ezért a két golyóból álló rendszer összes lendülete ütközés következtében nem változik. A lendület-megmaradás igazolt egy szétrobbanó lövedék esetén is.

A pontrendszer mozgási energiájának megváltozásának törvénye (munkatétel pontrendszer esetén):

Egy pontrendszer összes mozgási energiájának megváltozása egyenlő a rendszer tagjaira ható erők **(úgy külső mint belső!)** munkájának összegével.

$$\Delta \sum_{i=1}^n E_{mi} = \sum W_{külső} + \sum W_{belső}$$

Tehát egy pontrendszer összes mozgási energiáját a belső erők is megváltoztathatják!

Példa: Ha egy csónakban álló ember elindul, mindkét test energiát nyer anélkül, külső erőhatások nélkül.

Ütközések.

Két test ütközése egy olyan mechanikai kölcsönhatás mely nagyon rövid ideig tart, és általában ütközés előtt és után a testek nincsenek kölcsönhatásban. A legegyszerűbb ütközés az, amely egy egyenes mentén megy végbe.

Két ideális esetet különböztetünk meg:

Tökéletesen rugalmatlan ütközés:

Ilyenkor a testek ütközésük során összetapadnak, maradandó alakváltozást szenvednek. Ilyen két gyurmagolyó frontális ütközése. Ha ismerjük a testek ütközés előtti sebességét, kiszámíthatjuk az ütközés utáni közös sebességüket. Feltételezzük, hogy ütközés előtt a gyurmagolyók egy irányba mozognak egy egyenes mentén, különböző sebességekkel. A hátsó golyó utoléri az elsőt, és azzal rugalmatlanul ütközik. Legyen a golyók tömege m_1 és m_2 , az ütközés előtti sebességük v_1 és v_2 , ütközés utáni közös sebességük u .

A lendület-megmaradás értelmében:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u$$

$$\Rightarrow u = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

Ha ütközés előtt a testek ellenkező irányba mozogtak, akkor a fenti összefüggésben az egyik sebesség negatív, mivel a sebességek pozitív irányát önkényesen választhatjuk meg.

A rugalmatlan ütközés energiavesztéssel megy végbe. A testek összes mozgási energiája ütközés után kisebb, mint ütközés előtt. Ez az energiakülönbség nagyrészt hőenergia formájában jelenik meg (Q).

$$Q = -\Delta E_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2)^2$$

Az összefüggések akkor is használhatók, ha egy u sebességű lövedék két részre robban szét, és a darabok egy egyenes mentén mozognak v_1 és v_2 sebességekkel. Ebben az esetben Q a robbanásnál létrejövő energia.

Tökéletesen rugalmas ütközés

Ilyenkor a testek ütközés után szétválnak, szétpattannak, visszanyerik eredeti alakjukat, tehát nincs maradandó alakváltozás. Ilyennek tekinthető két acél vagy biliárdgolyó ütközése. Feltételezzük, hogy az ütköző golyók mechanikai állapota ütközés előtt azonos az előző esettel. A testek sebessége ütközés után legyen u_1 és u_2 . A lendület-megmaradás értelmében:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2$$

Ilyen ütközési folyamatnál nincs energiavesztés:

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_2^2$$

Megoldva a fenti két ismeretlenes egyenletrendszert, a következő eredményeket kapjuk:

$$u_1 = 2 \cdot \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} - v_1$$

$$u_2 = 2 \cdot \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} - v_2$$

A természetben előforduló ütközések általában nem tekinthetők ideális ütközéseknek. Általában van maradandó alakváltozás, és energiaveszteség is kisebb vagy nagyobb mértékben.

4. A merev test mechanikája

A merev test

- egy olyan méretekkel rendelkező test, mely mechanikai kölcsönhatás során nem változtatja meg alakját, nem deformálódik. A merev test egy olyan pontrendszernek tekinthető, mely nagyon sok olyan tömegpontból áll melyek egymással kölcsönhatásban állnak. A tömegpontok közötti távolság mechanikai kölcsönhatás során nem változik. Míg egy tömegpont esetén csak haladó mozgásról beszélhetünk a merev test forgómozgást is végezhet.

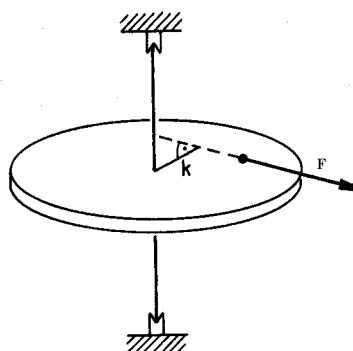
Egy merev test haladó mozgást végez, ha a testhez rendelt bármely egyenes a mozgás során önmagával párhuzamos marad. Pl: egy tehergépkocsi egyenes vonalú mozgása, az óriáskerék fülkéjének mozgása a talajhoz képest.

Egy merev test forgómozgást végez, ha minden pontja azonos szögsebességgel köröket ír le. A körök síkjai egymással párhuzamosak, a körök középpontjai egy egyenesen helyezkednek el. Ezt az egyenest nevezzük forgástengelynek. Pl: egy köszörűkő forgása, egy biciklipedál forgása a tengelyéhez képest.

A merev test összetett mozgást végez, ha egyidejűleg halad és forog is. Pl: egy autó kereke a talajhoz képest.

Az erőnyomaték (forgatónyomaték)

Az erőnyomaték egy olyan fizikai mennyiség mely egy erő forgatóhatását adja meg egy ponthoz vagy forgástengelyhez vonatkoztatva. Az erőnyomaték az erő nagyságától és az erőnek a forgástengelytől mért távolságától függ.



$$M_F = F \cdot k$$

$$[M_F] = 1N \cdot m$$

k – az erőkar: a vonatkoztatási pont (tengely) és az erő irányvonalának (hatásvonalának) távolsága.

Egy erőt centrális erőnek nevezünk, ha $k=0$, vagyis az erő irányvonala áthalad a forgásközépponton vagy tengelyen. Centrális erő nyomatéka nulla.

A merev mozgásának kinematikája és dinamikája.

Egy merev test mozgásának vizsgálatakor először fel kell ismernünk a mozgás típusát.

Ha a merev test egy egyszerű haladó mozgást végez, akkor a merev testet a tömegközéppontjához rendelt tömegponttal modellezzük, vagyis ezt a mozgástípust a tömegpont mozgásához vezetjük vissza. Ilyenkor tehát nem vesszük figyelembe a merev test méreteit, csak a merev test tömege lényeges. Alkalmazzuk a tömegpont kinematikájára és dinamikájára vonatkozó törvényeket.

Ha a merev test egy egyszerű forgást végez rögzített tengely vagy pont körül, akkor a forgómozgására vonatkozó kinematikai és dinamikai törvényeket alkalmazzuk. A forgómozgás törvényeit egyszerűen levezethetjük, ha felismerjük az analógiát a forgómozgás és haladó mozgás között. Tökéletes megfeleltetés létezik a haladó mozgást jellemző mennyiségek, törvények valamint a forgómozgást jellemző mennyiségek és törvények között. Ezt az analógiát tartalmazza a mellékletben szereplő táblázat.

Ha a merev test összetett (forgó+haladó) mozgást végez, akkor külön-külön vizsgáljuk a két mozgást, és külön-külön alkalmazzuk a két mozgási típusra a megfelelő törvényeket. Ilyen probléma megoldásakor általában egyenletrendszer megoldásához jutunk.

Módszertani javaslat:

A pontrendszerek és merev testek dinamikája anyagrész összefoglalása után a fogalmak megértése és elsajátítása érdekében célszerű a munkafüzet 52. -62. oldalon található kérdéseit közösen megválaszolni a tanuló csoporttal. Az elméleti kérdések házi feladatként is megválaszolhatók.

Az elméleti fogalmak megértése után elvégezhetők a munkafüzet ide vonatkozó mérési feladatai:

- Súlymérés (két pontban alátámasztott merev rúddal) – munkafüzet 62. oldal

- A forgómozgás dinamikájának kísérleti igazolása (a forgómozgás vizsgálata tanulói készlet segítségével) – munkafüzet 66. oldal

5. Melléklet - Analógia a tömegpont haladó és a merev test forgó mozgása között

A tömegpont haladó mozgását leíró mennyiségek			A merev test forgó mozgását leíró mennyiségek		
A mennyiség neve jele mértékegysége	Mire szolgál? Mit jellemez?	Képlete	A mennyiség Neve, jele, mértékegysége	Mire szolgál? Mit jellemez?	Képlete
Megtett út, (s)=1m	A mozgó tömegpont helyzetváltozását jellemzi		Szögelfordulás (α)=1rad	A forgó merev test helyzetváltozását jellemzi	$\alpha = \frac{s}{r}$, ahol s a test egy pontja által befutott ívhossz, r az ívhez tartozó sugár
Sebesség (v)=1 $\frac{m}{s}$	A mozgó tömegpont „gyorsaságát” jellemző vektormennyiség	$v = \frac{s}{t}$	Szögsebesség (ω)=1 $\frac{(rad)}{s}$	A forgó merev test forgási gyorsaságát jellemző (vektor) mennyiség	$\omega = \frac{\alpha}{t}$, $v_k = \omega \cdot r$, ahol v_k a merev test olyan pontjának kerületi sebessége mely r távolságra van a forgástengelytől
Gyorsulás (a)=1 $\frac{m}{s^2}$	A mozgó tömegpont sebességének megváltozását jellemző vektormennyiség	$a = \frac{\Delta v}{t}$	Szöggyorsulás (β)=1 $\frac{(rad)}{s^2}$	A forgó merev test szögsebességének megváltozását jellemző mennyiség	$\beta = \frac{\Delta \omega}{t}$, $a_e = \beta r$, ahol a_e a merev test olyan pontjának érintőleges gyorsulása, mely r távolságra van a forgástengelytől
Tömeg (m)=1kg	A tömegpont haladási tehetetlenségét jellemző skaláris mennyiség		Tehetlenségi nyomaték (Θ)= 1kgm ²	A merev test forgási tehetetlenségét jellemző skaláris mennyiség, mely függ a tömegtől és a tömegnek a forgási tengelyhez viszonyított térbeli eloszlásától (méretektől)	$\Theta = \sum_{i=1}^{\infty} m_i \cdot r_i^2$, ahol m_i a végtelen sok darabokra bontott merev test egy darabjának tömege, mely r_i távolságra van a forgástengelytől

Erő (F)=1N	A mechanikai kölcsönhatás mértékét és irányát jellemző vektormennyiség. A haladó mozgásállapot-változásának okozója.		Erőnyomaték (M)=1Nm	Az erő forgatóhatását jellemző mennyiség, tehát a merev test forgásállapot-változásának okozója.	$M = F \cdot k$, ahol k az erőkar, mely az erő támadásvonala és a forgástengely távolsága. A nyomaték iránya megegyezik a nyomaték által létrehozott forgásiránnyal.
Lendület, Impulzus (I)= $1kg \cdot \frac{m}{s} = 1Ns$	Vektormennyiség mely megadja mennyire képes egy mozgó (haladó) tömegpont egy másikat feldönteni, magával sodor- ni, felborítani stb.	$\vec{I} = m \cdot \vec{v}$	Perdület (N)= $1 \frac{kg \cdot m^2}{s}$	(vektor)mennyiség, mely megadja mennyire képes egy forgó merev test egy másikat feldönteni, magával so- dorni, felborítani stb.	$N = \Theta \cdot \omega$
Mechanikai mun- ka (W)=1Nm=1J	Skaláris mennyiség. Ha ez erő s távolságon elmozdít egy tömeg- pontot az erő irányába, akkor a munka az erő és elmozdulás szorzata.	$W = F \cdot s$	Mechanikai munka (W)= $1N \cdot m \cdot rad = 1Nm = 1J$	Skaláris mennyiség. Ha az erőnyoma- ték α szögelfordulást okoz a merev testnek a nyomaték irányába, akkor a munka az erőnyomaték és szögelfor- dulás szorzata.	$W = M \cdot \alpha$
Mechanikai telje- sítmény (P)= $1 \frac{J}{s} = 1W$	Skaláris mennyiség mely a munkavégzés gyorsaságát jel- lemzi. Az átlagteljesítmény az elmoz- dulásnál végzett munka és az ehhez szükséges idő hányadosa. A pillanatnyi teljesítmény az erő és pillanatnyi sebesség szorzata, ha az elmozdulás az erő irányá- ba történik	$P = \frac{W}{t}$ $P = F \cdot v$	Mechanikai teljesít- mény (P)= $1 \frac{J}{s} = 1W$	Skaláris mennyiség mely a munkavég- zés gyorsaságát jellemzi. Az átlagteljesítmény az elfordulásnál végzett munka és az ehhez szükséges idő hányadosa. A pillanatnyi teljesítmény az erőnyo- maték és a pillanatnyi szögsebesség szorzata, ha az elfordulás a nyomaték irányába történik.	$P = \frac{W}{t}$ $P = M \cdot \omega$
Mozgási (haladá- si) energia (E _m)=1J	Skaláris mennyiség mely egy mozgásban lévő tömegpont munkavégző képességét adja meg	$E_m = \frac{m \cdot v^2}{2}$	Forgási energia (E _f)=1J	Skaláris mennyiség mely egy forgás- ban lévő merev test munkavégző ké- pességét adja meg	$E_f = \frac{\Theta \cdot \omega^2}{2}$

A tömegpont haladó mozgását leíró törvények			A merev test forgását leíró törvények		
A fizikai törvény neve, ki-jelentése	Milyen esetben alkalmaz-zuk	A törvény matematikai egyenlete	A fizikai törvény neve, kije-lentése	Milyen esetben alkal-mazzuk	A törvény matematikai egyenlete
<u>Newton II. törvénye:</u> Ha egy tömegpontra erő hat, akkor gyorsulni fog az erő irá-nyába. Az erő egyenlő a tömeg és gyorsulás szorzatával.	Ha ismertek a tömegpontra ható erőhatások, kiszámíthatjuk a gyorsulását.	$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$, ahol $\Sigma \vec{F}$ az erők vektori összege.	<u>Newton második törvénye, avagy a forgómozgás alaptörvénye:</u> Ha egy tengelyezett merev testre erőnyomaték hat, akkor ez szöggyorsulást idéz elő. Az erőnyomaték egyenlő a tehetetlenségi nyomaték és szöggyorsulás szor-zatával.	Ha ismertek a merev testre ható erőnyomatékok, kiszá-míthatjuk a merev test szöggyorsulását.	$\Sigma \vec{M} = \Theta \cdot \beta$, ahol $\Sigma \vec{M}$ a merev testre ható erőnyoma-tékok eredője a tengelyhez vo-natkoztatva.
<u>A tömegpont haladási egyensú-lyi feltétele:</u> Egy tömegpont haladási egyensúlyban van (nyugalom-ban vagy egyenes vonalú egyenletes mozgásban, ha a tömegpontra ható erők ki-egyenlítik egymást.	Ha egyensúlyban lévő tömeg-pontra ható erőt, erőket aka-runk meghatározni, vagy az egyensúllyal kapcsolatos meny-nyiséget szeretnénk kiszámolni (valamely erő iránya)	Ha $\Sigma \vec{F} = 0$, akkor $a=0$, tehát $v=$ állan-dó vagy nulla	<u>A merev test forgási egyensúlyi feltétele:</u> Egy tengelyezett merev test forgási egyensúlyban van (nem forog vagy egyenletesen forog) ha a rá ható erőnyomatékok kiegyenlítik egymást.	Ha forgási egyensúlyban lévő merev testre ható erőt, erőket szeretnénk meghatá-rozni vagy az egyensúllyal kapcsolatos mennyiséget szeretnénk kiszámolni (va-lamely erő iránya, erőkarok, távolságok)	Ha $\Sigma \vec{M} = 0$, akkor $\beta=0$, te-hát $\omega=$ állandó vagy nulla
<u>A lendület-változás törvénye:</u> A tömegpont Δt idő alatt bekö-vetkező lendületváltozása egyenlő az erő-lökéssel. Az erő-lökés egyenlő a tömegpontra ható eredő erő és az időtartam	Hirtelen lendületváltozások esetén (pl ütközések) meghatá-rozhatjuk a kölcsönhatásnál ébredő erőket ha ismert a köl-csönhatás időtartama és lendü-letváltozás.	$\Delta \vec{I} = \Sigma \vec{F} \cdot \Delta t$	<u>A perdület-változás törvénye:</u> A tengelyezett merev test Δt idő alatt bekövetkező perdületváltozása egyenlő a vál-tozást előidéző eredő erőnyoma-ték és az időtartam szorzatával.	Hirtelen perdületváltozások (pl merev testek ütközése, vagy tömegpont ütközése merev testtel) esetén megha-tározhatjuk a kölcsönhatás-nál ébredő erőnyomatéko-	$\Delta \vec{N} = \Sigma \vec{M} \cdot \Delta t$

szorzatával. Pontrendszerek esetén csak a külső erőket kell figyelembe venni.				kat, ha ismert a kölcsönhatás időtartama és a perdületváltozás.	
<u>A lendület-megmaradás törvénye:</u> Egy szigetelt tömegpont vagy zárt pontrendszer (nincsenek külső erők) összes lendülete nem változhat, állandó.	Ütközési folyamatok esetén a rövid idejű ($\Delta t \rightarrow 0$) kölcsönhatás miatt a külső erők elhanyagolhatók, ezért az ütköző tömegpontok lendületének vektori!! összege nem változik.	Ha $F_{\text{külső}}=0$, akkor $\sum \vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \dots = \text{állandó}$	<u>A perdület-megmaradás törvénye:</u> Ha egy merev testre nem hatnak olyan külső erőnyomatékok melyek befolyásolják a forgást, a perdület változatlan marad.	Ha pl egy merev test tehetetlenségi nyomatéka forgás közben külső hatás nélkül megváltozik, akkor a forgás szögsebessége is megváltozik úgy, hogy a perdület állandó maradjon. (a piruettező esete)	Ha $M_{\text{külső}}=0$, akkor $N=\Theta\omega=\text{állandó}$
<u>A munkatétel törvénye:</u> A tömegpont mozgási energiájának megváltozása egyenlő a tömegpontra ható erők munkájának összegével. Egy erő munkája pozitív, ha az erő hozzájárul a mozgási energia növekedéséhez.	Pl: Ismerve az erőket és az elmozdulást meghatározhatjuk a tömegpont által elért sebességet.	$\Delta E_m = \sum W$	<u>A munkatétel törvénye:</u> Egy tengelyezett merev test forgási energiájának megváltozása egyenlő a merev testre ható erők (erőnyomatékok) munkájának összegével. Egy erő munkája pozitív, ha az erő hozzájárul a forgási energia növekedéséhez.	Pl: Ismerve a forgást befolyásoló erők nyomatékait és a szögelfordulást meghatározhatjuk a merev test által elért szögsebességet.	$\Delta E_f = \sum W$ $\sum W = (\sum M) \cdot \alpha$
<u>Az energia-megmaradásának törvénye:</u> Konzervatív erőmezőben (F_g , F_{ragalmas}) egy test mechanikai ($E_{\text{haladási}} + E_{\text{pot}}$) energiája időben állandó.	Pl. szabadesésnél, hajításoknál és minden olyan esetben, amikor nincs gyorsító vagy fékező (pl. súrlódás) nem konzervatív erő megkaphatjuk az elmozdulás (magasság) -sebesség kapcsolatát.		<u>Az energia-megmaradásának törvénye:</u> Konzervatív erőmezőben (F_g , F_{ragalmas}) egy test mechanikai ($E_{\text{forgási}} + E_{\text{pot}}$) energiája időben állandó.	Pl. ha egy függőleges helyzetű deszka egy alsó csukló körül lebillen, és nincs semmiféle nem konzervatív erőhatás (pl súrlódás), akkor megkaphatjuk a deszka szögsebességét a TK helyzetének függvényében.	

Előszó.....	1
1. A tömegpont kinematikája.....	2
Alapfogalmak:	2
A tömegpont egyszerű mozgás típusai.	4
Az egyenes vonalú egyenletes mozgás.....	4
Az egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás.....	4
Függőleges szabad mozgás a Föld gravitációs terében:	5
Vízszintes hajítás a Föld gravitációs terében (emelt szint)	5
Ferde hajítás a Föld gravitációs terében (OKTV verseny szint)	6
Az egyenletes körmozgás.	8
Az egyenletesen változó körmozgás (emelt szint)	9
A harmonikus rezgőmozgás	11
A hullámmozgás	12
2. A tömegpont dinamikája.	19
Newton törvényei:.....	19
Newton I. törvénye, vagy a tehetetlenség elve.	19
Newton II. törvénye, vagy az erőhatások elve.....	19
Newton III. törvénye, vagy a hatás-ellenhatás törvénye.....	20
Jellegzetes mechanikai erőtípusok.	20
Testek mozgása a lejtőn.....	24
A tömegpont lendülete (impulzusa)	25
A lendületváltozás törvénye tömegpont esetén:	26
A mechanikai munka és teljesítmény. A határfok.....	26
Erőtípusok munkavégzése.....	28
A nehézségi erő munkája, emelési munka	28
a rugalmas típusú erő munkája, feszítési, nyújtási munka.....	28
A rugóerő munkája.	29
A csúszósúrlódási erő munkája.....	29
A mechanikai energia fogalma. Energiatípusok. Megmaradási, változási törvények.	29
A mechanikai energia	29
A mozgási energia:	30
A mozgási energia megváltozásának törvénye, avagy a munkatétel törvénye:	30

A gravitációs helyzeti (potenciális) energia:	30
A helyzeti energia megváltozásának törvénye:	31
A rugalmas helyzeti (potenciális) energia:	31
A rugalmas helyzeti energia megváltozásának törvénye:	31
A helyzeti (potenciális) energia fogalmának általánosítása:	32
A mechanikai energia:	32
A mechanikai energia megváltozása, megmaradása:	32
Lineáris-harmonikus oszcillátor energiája:	33
Módszertani javaslat:	34
3. Pontrendszerek mechanikája	35
Pontrendszer:	35
A tömegközéppont:	35
A tömegközéppontra vonatkozó tételek.	36
Pontrendszerre vonatkozó törvények	37
A lendület-változásának és megmaradásának törvénye:	37
A pontrendszer mozgási energiájának megváltozásának törvénye (munkatétel pontrendszer esetén):	38
Ütközések.	38
Tökéletesen rugalmatlan ütközés:	38
Tökéletesen rugalmas ütközés	39
4. A merev test mechanikája	41
A merev test	41
Az erőnyomaték (forgatónyomaték)	41
A merev mozgásának kinematikája és dinamikája.	42
Módszertani javaslat:	42
5. Melléklet - Analógia a tömegpont haladó és a merev test forgó mozgása között	44